PENYELESAIAN INVERS MATRIKS MENGGUNAKAN METODE *GENERALIZED INVERSE*

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

oleh

DESI MURNITA
10654004469

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012

PENYELESAIAN INVERS MATRIKS MENGGUNAKAN METODE *GENERALIZED INVERSE*

DESI MURNITA
10654004469

Tanggal Sidang : 22 Juni 2012
Periode Wisuda : Oktober 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang langkah-langkah atau aturan dalam menentukan *generalized inverse* dari matriks yang berukuran m x n dan matriks berukuran n x n. Ada 2 cara untuk menentukan *generalized inverse* pada matriks yaitu aturan pendiagonalan matriks dan aturan algoritma. Berdasarkan hasil penelitian ini, maka diperoleh bahwa *generalized inverse* dari sebuah matriks A adalah sebarang matriks G yang memenuhi persamaan $AGA=A$. Adapun matriks G ini tidak tunggal. Untuk aturan pendiagonalan matriks banyak matriks G (*generalized inverse*) dapat dilihat dari banyaknya baris atau kolom. Sedangkan untuk *generalized inverse* pada aturan algoritma dapat ditentukan jumlah *generalized inverse* sebanyak perkalian ordo matriks.

Katakunci : *generalized inverse*, invers, *rank*.

DETERMINE THE MATRIX INVERSE WITH USE METHOD OF GENERALIZED INVERSE

DESI MURNITA
10654004469

Date of Final Exam : *June* 22th, 2012
Graduation Ceremony Period : *October* , 2012

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
JL. HR. Soebrantas no. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This thesis discusses the steps or rules in determining the generalized inverse of a matrix of size mxn and matrix size nxn. There are two ways to determine the generalized inverse of the matrix is a matrix diagonalization rules and rules of the algorithm. Based on these results, it is found that the generalized inverse of a matrix A is any matrix G satisfies AGA = A. As for the matrix G is not uniq for to the matrix is not uniq is a matrix diagonalization rules can be seen in the matrix, the matrix G can be seen for the number of rows or columns. While the rules that the algorithm to determine the number of generalized inverse can be de termined by multiplying the matrix A is of the order.

Keywords *: generalized inverse,inverse, rank.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillahirabbil'alamin penulis ucapkan sebagai tanda syukur yang dalam kepada Allah SWT atas segala karunia dan rahmat yang diberikan Nya, sehingga penulis dapat melaksanakan dan akhirnya dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini. Shalawat beserta salam terucap buat junjungan alam Nabi Besar Muhammad SAW. Buat Ayahanda (Tuadin) dan Ibunda (Murniati, S.Pd) tercinta, tidak akan cukup kertas ini menampung tulisan ucapan terima kasih atas apa yang mereka berikan sejak penulis dalam kandungan hingga sekarang ini.

Tugas akhir ini salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Jurusan Matematika Universitas Islam Sultan Syarif Kasim Pekanbaru. Banyak sekali pihak yang telah membantu penulis dalam menyusun laporan tugas akhir ini, baik berupa teori maupun motivasi, untuk itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau yang telah banyak membimbing mahasiswa untuk menjadi sarjanawan/ti yang lebih berguna bagi nusa dan bangsa untuk masa yang akan datang.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau yang telah banyak memberikan motivasi kepada semua mahasiswa untuk menjadi Sarjana Sains dan Teknologi yang diakui dalam dunia kerja.
3. Ibu Sri Basriati , M.Sc selaku Plt. Ketua Jurusan Matematika.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Koordinator Tugas Akhir ini dan sekaligus sebagai pembimbing yang telah banyak membimbing, mengarahkan dan membantu dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku Penguji Tugas Akhir ini.
6. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc selaku Penguji Tugas Akhir ini.

7. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi khususnya Jurusan Matematika yang telah ikhlas memberikan ilmu, nasehat serta bimbingannya selama ini kepada penulis.
8. Teman-teman Jurusan Matematika khususnya angkatan 2006.
9. Adik-adikku tersayang, Oktria Aspiarni dan Laksmita Dewi yang telah memberikan motivasi serta dukungannya.
10. Semua Pihak yang telah memberi bantuan dari awal sampai selesainya skripsi ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Semoga semua kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT, Amin. Dalam penulisan ini penulis sadar bahwa tugas akhir ini belum sempurna. Namun, penulis sudah berusaha untuk mencapai hasil yang semaksimal mungkin. Oleh karena itu, kritik dan saran pembaca sangat penulis harapkan. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak pada umumnya dan bagi mahasiswa Matematika pada khususnya.

Pekanbaru, Juni 2012
Penulis

Desi Murnita
10654004469

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matriks merupakan salah satu materi dasar untuk mempelajari ilmu matematika khususnya masalah aljabar. Masalah matriks ini sudah tidak asing bagi mahasiswa karena matriks sudah dipelajari sejak duduk di bangku sekolah menengah. Perhitungan matriks merupakan suatu topik yang penting dan sering digunakan dalam aplikasi matematika. Matriks digunakan dalam memecahkan berbagai persoalan. Contohnya menyelesaikan sistem permasalahan linier, persamaan diferensial, numerik dan lain sebagainya.

Matriks mempunyai bentuk dan ukuran atau ordo matriks. Diantaranya matriks bujur sangkar yang berukuran n x n, matriks identitas, matriks segitiga atas dan segitiga bawah, matriks simetris, matriks diagonal, matriks singular dan non singular. Sedangkan ukuran matriks (ordo matriks) di tentukan oleh banyaknya baris dan kolom sebuah matriks.

Dalam perhitungan matriks terdapat beberapa operasi matriks, antara lain penjumlahan matriks, perkalian matriks, determinan dari matriks dan menentukan invers dari matriks. Suatu matriks mempunyai invers adalah matriks tersebut merupakan matriks bujur sangkar dan nonsingular dengan n baris dan n kolom. Dengan kata lain bahwa hanya matriks bujur sangkar dan nonsingular yang memiliki invers. Berdasarkan jurnal yang berjudul ”*A Generalized Inverse For Matrices*” karangan R. Penrose tahun 1954 bahwasanya bukan hanya matriks bujur sangkar yang mempunyai invers, tetapi matriks yang tidak bujur sangkar dan singular juga mempunyai invers yang disebut *generalized inverse*.

Generalized inverse telah banyak yang membahas dan meneliti diantaranya, Jeff Gill and King dalam jurnal yang berjudul ”*What is the Generalized Inverse of a Matrix*?” yang telah membahas mengenai menentukan *generalized inverse* pada matriks. Selanjutnya pada jurnal yang berjudul ”*On The Generalisized Inverse of a Matrix*” karangan I.A adetunde, dkk tahun 2010 yang membahas tentang menentukan *generalized inverse* pada matriks singular dan matriks bujur sangkar serta penerapannya pada sistem persamaan linear.

Berdasarkan latar belakang tersebut maka penulis tertarik untuk mengemukakan tentang bagaimana menentukan *generalized inverse* dari matriks yang tidak bujur sangkar berukuran $m \times n$ dan matriks bujur sangkar yang berukuran $n \times n$ yang singular .

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang maka penulis membahas masalah pada penelitian ini yaitu bagaimana menentukan *generalized inverse* pada matriks dengan aturan pendiagonalan matriks dan aturan algoritma.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah mengemukakan langkah-langkah dalam menentukan *generalized inverse* pada sebuah matriks dengan batasan masalah :

a) Pada aturan pendiagonalan matriks hanya untuk matriks 3 x 3.
b) Pada aturan algoritma hanya untuk matriks dengan *rank* 1, *rank* 2 dan *rank* 3.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menentukan langkah-langkah untuk mendapatkan *generalized inverse* pada sebuah matriks dengan aturan pendiagonalan matriks dan aturan algoritma matriks.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut :

a. Penulis mengharapkan dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika mengenai matriks, khususnya *generalized inverse* pada matriks.

b. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi matriks yang tentunya akan sangat memberikan konstribusi untuk mempermudah dalam menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan *generalized inverse* pada matriks.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam Tugas Akhir ini mencakup lima bab yaitu:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan dasar-dasar penulisan dalam Tugas Akhir seperti latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Berisi teori-teori yang mendukung tentang matriks dan memahami komponen-komponen yang ada hubungannya dengan penelitian ini.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan metode yang penulis gunakan dalam penyelesaian tugas akhir.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara dengan teoritis dalam mendapatkan hasil penelitian tersebut.

BAB V Penutup

Bab ini berisi tentang saran-saran dan kesimpulan dari pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Matriks mempunyai peranan yang penting di dalam matematika. Pentingnya peranan matriks ini dapat dilihat begitu banyaknya penggunaan matriks pada berbagai bidang antara lain aljabar, statistika, numerik, persamaan differensial dan lain-lain. Adapun defenisi dari suatu matriks dijelaskan sebagai berikut :

Definisi 2.1 (Howard Anton, 2000) Sebuah matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Ukuran dari matriks dinyatakan dalam bentuk jumlah baris (*horizontal*) dan jumlah kolom (*vertikal*) yang memuatnya.

Entri dari sebuah A yang berada pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dinotasikan dengan a_{ij}. Bentuk umum suatu matriks adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}.$$

Matriks di atas mempunyai ukuran m baris dan n kolom dan dinotasikan dengan A_{mxn} . Secara singkat sebuah matriks A dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$A_{mxn} = [a_{ij}]_{m\times n} \text{ atau } A = [a_{ij}]_{mxn} \quad .$$

Definisi 2.2 (Howard Anton, 2000) Suatu matriks yang banyaknya dan kolomnya sama ($m = n$), yang dinotasikan dengan A_{nxn} **,** disebut matriks bujur sangkar.

$$A_{n\,xn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.3 (Leon, 2001) Misalkan $n \times n$ dengan semua entri pada diagonalnya adalah satu dan nol, selainnya disebut matriks identitas $n \times n$, dinotasikan dengan:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

dengan kata lain, $I_n = (a_{ij})$ dimana $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Definisi 2.4 (Howard Anton, 2000) Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya adalah nol atau $a_{ij} = 0$ untuk suatu $i > j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol atau $a_{ij} = 0$ untuk suatu $i < j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.5 (Howard Anton, 2000) Suatu matriks bujur sangkar yang semua anggota non diagonal utamanya nol disebut matriks diagonal.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.6 (Howard Anton, 2000) Suatu matriks disebut simetris jika $A^t = A$,

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti bahwa $A^t = A$ adalah matriks simetris.

Definisi 2.7 (Suryadi HS, 1991) Suatu matriks bujur sangkar A disebut singular apabila $\det(A) = 0$. Jika $\det(A) \neq 0$ maka *A* disebut nonsingular. Matriks yang singular tidak mempunyai invers. Sedangkan matriks nonsingular mempunyai invers.

2.2 *Rank* matriks

Definisi 2.8 (Jacob, 1990) Jika *A* adalah sebuah matriks. Rank dari matriks *A* adalah jumlah dari baris-baris yang tidak nol dalam bentuk eselon baris tereduksi dari matriks *A*. Rank dari matriks *A* dinotasikan dengan *rk(A)*.

Misalkan matriks *A* berukuran *m x n*. Jika *rk(A)* = min (*m*,*n*), maka matriks *A* dikatakan memiliki rank penuh (*full rank*). Jika *rk(A) = m*, maka matriks *A* dikatakan memiliki rank baris penuh (*full rank row*). Demikian juga jika *rk(A) = n*, maka matriks *A* dikatakan memiliki rank kolom penuh (*full rank coloum*).

Contoh 2.1 : Misalkan matriks A berukuran *3 x 4* yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$, akan ditentukan *rank* dari matriks tersebut.

Penyelesaian :

Akan dilakukan operasi baris elementer terhadap matriks A sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} b_2 - 3b_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} b_3 - b_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

maka diperoleh *rk (A)* = 2.

2.3 Invers Matriks

Definisi 2.9 (Howard Anton, 2000) Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika sebuah matriks B yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut **bisa dibalik** dan B disebut **invers** dari A.

2.4 Sifat-sifat Invers

Definisi 2.10 (Howard Anton, 2000) Jika A adalah matriks bujur sangkar,dan jika diperoleh matriks A^{-1} sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan A^{-1} disebut invers dari A.

Definisi 2.11 (Howard Anton, 2000) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka definisi dari pangkat bilangan bulat tak negatif dari A adalah

$A^0 = I$ dan $A^n = A\,A\,A\ \ldots A\ (n > 0)$,

Selanjutnya, jika A dapat dibalik maka definisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari A adalah $A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}$.

Contoh 2.2 : Mencari A^{-1} dari matriks *3x3* dengan menggunakan operasi baris elementer, sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesian :

$[A \vdots A] \rightarrow [A \vdots A^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

1.menambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua dan -1 kali baris pertama pada baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

2. Menambahkan 2 kali baris kedua pada baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

3. Menambahkan baris ketiga dengan -1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

4. Menambahkan 3 kali baris ketiga pada baris kedua dan -3 kali baris ketiga pada baris pertama

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

5. Menambahkan -2 kali baris kedua pada baris pertama

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$

2.5 Determinan

Definisi 2.12 (Howard Anton, 2000) Misalkan *A* adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh det (*A*) sebagian jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari *A*.

Contoh 2.3: Akan ditentukan determinan dari matriks 2x2 dengan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

Contoh 2.4: Akan ditentukan determinan dari matriks 3x3 dengan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

1. Aturan Pendiagonalan Matriks (Suryana, 1971) :

a. Diketahui matriks sembarang *A* yang berukuran *n x n*.

b. Akan dicari matriks *P* dan matriks *Q*. Matriks *P* dicari dengan menggunakan operasi elementer baris, sedangkan matriks *Q* dicari dengan menggunakan operasi elementer kolom.

c. Setelah didapatkan matriks *P* dan matriks *Q*, akan ditentukan matriks Δ yaitu $\Delta = PAQ$.

d. Kemudian akan dicari invers dari matriks Δ.

e. Selanjutnya akan ditentukan matriks *G* yaitu $G = Q\Delta^{-}P$. *G* adalah *generalized inverse* dari matriks *A*.

2. Aturan Algoritma (I.A Adetunde, dkk, 2010) :

a. Diberikan matriks *A* dengan ordo *m x n rank r*, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde *r*. Notasikan dengan *M*.

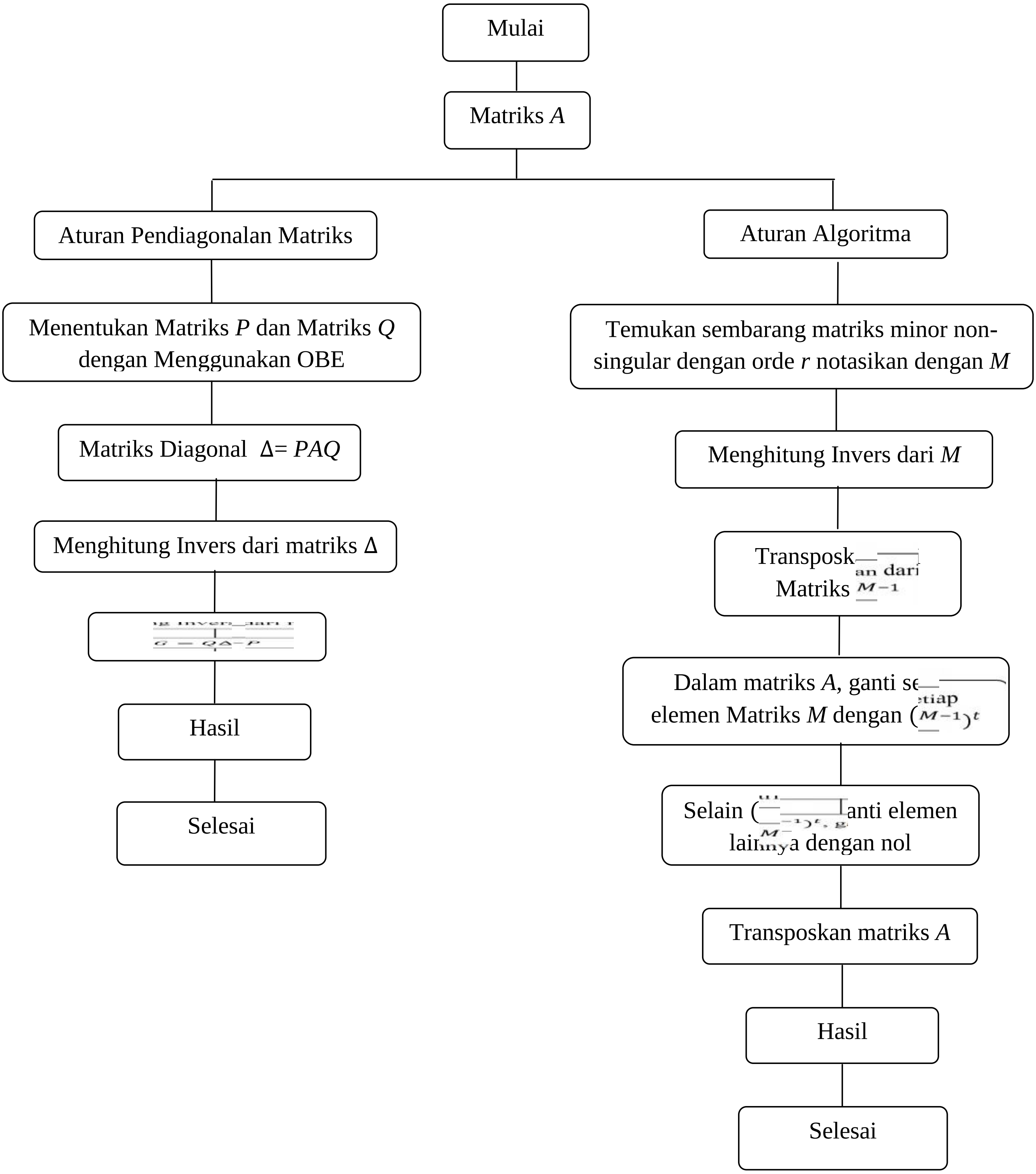
b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^{t}$.

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^{t}$, ganti elemen lainnya dengan nol.

d. Transposkan matriks *A*.

e. Hasilnya berupa matriks *G* yang merupakan *generalized inverse* dari *A*.

Langkah-langkah metodologi penelitian diatas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut :



Gambar 3.1 *Flowchart* Metodologi Penelitian

BAB IV
PEMBAHASAN DAN HASIL

4.1 *Generalized Inverse*

Selama ini yang diketahui matriks yang memiliki invers adalah matriks bujur sangkar dan non singular. Akan tetapi bila diberikan permasalahan untuk matriks yang tidak bujur sangkar, maka kita dapat menentukan invers dari matriks tersebut yang disebut *generalized inverse*.

Definisi 4.1 (Searle, 1971) Jika matriks A berukuran m x n. Kemudian terdapat matriks G berukuran n x m, maka G disebut *Generalized inverse* dari matriks A apabila berlaku $AGA = A$. Adapun matriks G ini tidak tunggal. Ada dua cara untuk menentukan *generalized inverse* dari sebuah matriks :

1. Aturan pendiagonalan matriks
2. Aturan algoritma

Berdasarkan metodologi penelitian pada Bab III, berikut ini akan diberikan contoh matriks yang bujur sangkar berukuran n x n untuk menentukan *generalized inverse* dengan menggunakan Aturan Pendiagonalan Matriks.

Contoh 4.1 : Akan ditentukan *generalized inverse* dari matriks A dengan ordo 3 x 3 dengan menggunakan aturan pendiagonalan matriks, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

Adapun langkah-langkah untuk menentukan *generalized inverse* dengan menggunakan aturan Pendiagonalan Matriks adalah sebagai berikut :

a. Diketahui matriks A ordo 3 x 3. Akan di cari matriks P dan matriks Q dengan melakukan operasi baris elementer dan operasi kolom elementer. Untuk matriks P dicari dengan operasi elementer baris :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad b_1 \leftrightarrow b_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} b_3 - 3b_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & | & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} b_2 - 4b_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & | & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & | & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} b_3 - {}^2\!/_3\, b_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & | & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -{}^2\!/_3 & -{}^1\!/_3 & 1 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh P :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

untuk matriks Q dicari dengan operasi elementer kolom :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} k_2 - k_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} k_3 - 6k_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh Q :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Setelah didapatkan P dan Q selanjutnya akan ditentukan matriks Δ dengan menggunakan persamaan $\Delta = PAQ$, yaitu :

$$\Delta = PAQ$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Kemudian akan dicari invers dari matriks Δ , sehingga diperoleh :

$$\Delta^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Selanjutnya akan ditentukan matriks G_1 yaitu $G_1 = Q\,\Delta^-\,P$, yaitu :

$$G_1 = Q\,\Delta^-\,P$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sehingga matriks G_1 adalah *generalized inverse* dari matriks *A* yaitu:

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan G_1 adalah *generalized inverse* dari A apabila berlaku $AG_1A = A$, yaitu :

$$AG_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$AG_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $AG_1A = A$, G_1 adalah *generalized inverse* dari matriks *A*. Matriks *G* ini tidak tunggal. Untuk menentukan *generalized inverse* lainnya dengan menggunakan aturan pendiagonalan matriks sebagai berikut :

a. Diketahui matriks *A* ordo *3 x 3*. Akan di cari matriks *P* dan matriks *Q* dengan melakukan operasi baris elementer dan operasi kolom elementer. Untuk matriks *P* dicari dengan operasi elementer baris :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] b_1 - 4b_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & -18 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] b_3 - 3b_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & -18 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] b_1 - \frac{3}{2} b_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 12 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right],$$

sehingga diperoleh *P* :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

untuk matriks Q dicari dengan operasi elementer kolom :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -12 \\ - & - & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} k_3 - 5k_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ - & - & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} k_2 - k_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ - & - & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} k_1 - k_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ - & - & - \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh Q :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Setelah didapatkan P dan Q selanjutnya akan ditentukan matriks Δ dengan menggunakan persamaan $\Delta = PAQ$, yaitu :

$\Delta = PAQ$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

c. Kemudian akan dicari invers dari matriks Δ, sehingga diperoleh :

$$\Delta^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

d. Selanjutnya akan ditentukan matriks G_2 yaitu $G = Q\,\Delta^-\,P$, yaitu :

$G_2 = Q\,\Delta^-\,P$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

sehingga matriks G_2 adalah *generalized inverse* dari matriks *A* yaitu:

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan G_2 adalah *generalized inverse* dari *A* apabila berlaku $AG_2A = A$, yaitu :

$$AG_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AG_2A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $AG_2A = A$, G_2 adalah *generalized inverse* dari matriks *A.* Matriks *G* ini tidak tunggal. Untuk menentukan *generalized inverse* lainnya dengan menggunakan aturan pendiagonalan matriks sebagai berikut :

a. Diketahui matriks *A* ordo *3 x 3*. Akan di cari matriks *P* dan matriks *Q* dengan melakukan operasi baris elementer dan operasi kolom elementer. Untuk matriks *P* dicari dengan operasi elementer baris :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] b_1 - b_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] b_3 - 3b_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] b_2 - b_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] b_2 + 1/2\, b_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & -2 & -12 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] b_1 + b_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & -2 & 12 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right],$$

sehingga diperoleh *P* :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

untuk matriks *Q* dicari dengan operasi elementer kolom :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ - & - & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} k_3+k_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ - & - & - \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} k_2 - {}^{1}\!/_{6}\, k_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \\ - & - & - \\ 1 & -{}^{1}\!/_{6} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -{}^{1}\!/_{6} & 1 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh Q :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -{}^{1}\!/_{6} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -{}^{1}\!/_{6} & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Setelah didapatkan P dan Q selanjutnya akan ditentukan matriks Δ dengan menggunakan persamaan $\Delta = PAQ$, yaitu :

$$\Delta = PAQ$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -{}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{2} \\ -1 & -{}^{1}\!/_{2} & {}^{3}\!/_{2} \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -{}^{1}\!/_{6} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -{}^{1}\!/_{6} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

c. Kemudian akan dicari invers dari matriks Δ diperoleh :

$$\Delta^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/12 \end{bmatrix}.$$

d. Selanjutnya akan ditentukan matriks G_3yaitu $G \ = Q\ \Delta^-\ P$, yaitu :

$$G_3 \ = Q\ \Delta^-\ P$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/12 & -1/12 \end{bmatrix},$$

sehingga matriks G_3 adalah *generalized inverse* dari matriks *A* yaitu:

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & -3/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/12 & -1/12 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan G_3 adalah *generalized inverse* dari *A* apabila berlaku $AG_3A = A$, yaitu :

$$AG_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/12 & -1/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/12 \end{bmatrix}$$

$$AG_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $AG_3A = A$, G_3 adalah *generalized inverse* dari matriks *A.* Matriks *G* ini tidak tunggal.

Berikut ini akan diberikan contoh matriks yang bujur sangkar berukuran *n x n* untuk menentukan *generalized inverse* dengan menggunakan Aturan Algoritma dengan *rank* 2.

Contoh 4.2 : Akan ditentukan *generalized inverse* dari matriks A dengan ordo *3 x 3* dengan menggunakan aturan algoritma, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

Akan ditentukan *rank* dari matriks A dengan menggunakan operasi baris elementer sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} b_3 \leftrightarrow b_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} b_3 - 3b_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -12 \end{bmatrix} b_2 - 4b_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & -2 & -12 \end{bmatrix} b_3 - {}^2\!/_3\, b_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Jadi *rank* dari matriks A adalah 2.

Adapun langkah-langkah untuk menentukan *generalized inverse* dengan menggunakan aturan algoritma adalah sebagai berikut :

a. Diberikan matriks A dengan ordo *3x3* dengan $rk(A) = 2$, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan M,

$$M_1 = M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks M, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} {}^1\!/_3 & -{}^1\!/_3 \\ -{}^1\!/_3 & {}^4\!/_3 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks A, ganti setiap elemen matriks M dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} {}^1\!/_3 & -{}^1\!/_3 & 0 \\ -{}^1\!/_3 & {}^4\!/_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks A,

$$A^t = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_1, *generalized inverse* dari *A*,

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_1 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *A*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_1 adalah *generalized inverse* dari *A* apabila berlaku $AG_1A = A$,

$$AG_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AG_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

jadi, terbukti $AG_1A = A$, G_1 adalah *generalized inverse* dari matriks *A*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *A* dengan ordo *3x3* dengan *rk*(*A*) = *2*, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_2 = M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 5/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5/3 & -1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *A*,

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5/3 & -2/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_2, *generalized inverse* dari *A*,

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5/3 & -2/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_2 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *A*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_2 adalah *generalized inverse* dari *A* apabila berlaku AG_2A = *A*,

$$AG_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5/3 & -2/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AG_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti AG_2A = *A*, G_2 adalah *generalized inverse* dari matriks *A*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *A* dengan ordo *3x3* dengan *rk*(*A*) = *2*, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_3 = M = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 5/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 5/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *A*,

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_3, *generalized inverse* dari *A*,

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_3 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *A*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_3 adalah *generalized inverse* dari *A* apabila berlaku AG_3A = *A*,

$$AG_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AG_3A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti AG_3A = *A*, G_3 adalah *generalized inverse* dari matriks *A*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *A* dengan ordo *3x3* dengan *rk*(*A*) = *2*, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_4 = M = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} -3/12 & 3/12 \\ 5/12 & -1/12 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3/12 & 0 & 3/12 \\ 5/12 & 0 & -1/12 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *A*,

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/12 & -1/12 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_4, *generalized inverse* dari *A*,

$$G_4 = \begin{bmatrix} 0 & -3/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/12 & -1/12 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_4 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *A*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_4 adalah *generalized inverse* dari *A* apabila berlaku $AG_4A = A$,

$$AG_4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/12 & -1/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6/12 & 18/12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AG_4A = \begin{bmatrix} 0 & -6/12 & 18/12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $AG_4A = A$, G_4 adalah *generalized inverse* dari matriks *A*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *A* dengan ordo *3x3* dengan *rk*(*A*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_5 = M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *A*,

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_5, *generalized inverse* dari *A*,

$$G_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_5 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *A*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_5 adalah *generalized inverse* dari *A* apabila berlaku $AG_5A = A$,

$$AG_5 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AG_5A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $AG_5A = A$, G_5 adalah *generalized inverse* dari matriks *A*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *A* dengan ordo *3x3* dengan *rk*(*A*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_6 = M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 5/18 & -1/18 \\ -2/18 & 4/18 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 5/18 & 0 & -1/18 \\ -2/18 & 0 & 4/18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *A*,

$$A^t = \begin{bmatrix} 5/18 & -2/18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/18 & 4/18 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_6, *generalized inverse* dari *A*,

$$G_6 = \begin{bmatrix} 5/18 & -2/18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/18 & 4/18 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_6 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *A*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_6 adalah *generalized inverse* dari *A* apabila berlaku AG_6A = *A*,

$$AG_6 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/18 & -2/18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/18 & 4/18 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 12/18 & 6/18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AG_6A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 12/18 & 6/18 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti AG_6A = *A*, G_6 adalah *generalized inverse* dari matriks *A*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *A* dengan ordo *3x3* dengan *rk*(*A*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_7 = M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *A*,

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_7, *generalized inverse* dari *A*,

$$G_7 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_7 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *A*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_7 adalah *generalized inverse* dari *A* apabila berlaku $AG_7A = A$,

$$AG_7 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AG_7A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $AG_7A = A$, G_7 adalah *generalized inverse* dari matriks *A*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *A* dengan ordo *3x3* dengan *rk*(*A*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_8 = M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 3/6 & -3/6 \\ -2/6 & 4/6 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 3/6 & 0 & -3/6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2/6 & 0 & 4/6 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *A*,

$$A^t = \begin{bmatrix} 3/6 & 0 & -2/6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3/6 & 0 & 4/6 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_8, *generalized inverse* dari *A*,

$$G_8 = \begin{bmatrix} 3/6 & 0 & -2/6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3/6 & 0 & 4/6 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_8 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *A*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_8 adalah *generalized inverse* dari *A* apabila berlaku AG_8A = *A*,

$$AG_8 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/6 & 0 & -2/6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3/6 & 0 & 4/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AG_8A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti AG_8A = *A*, G_8 adalah *generalized inverse* dari matriks *A*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *A* dengan ordo *3x3* dengan *rk*(*A*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_9 = M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *A*,

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_9, *generalized inverse* dari *A*,

$$G_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_9 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *A*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_9 adalah *generalized inverse* dari *A* apabila berlaku $AG_9A = A$,

$$AG_9 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AG_9A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $AG_9A = A$, G_9 adalah *generalized inverse* dari matriks *A*.

Dengan ditunjukkan $AG_9A = A$, G_9 adalah *generalized inverse* dari matriks *A*. Dari hasil diatas dapat dilihat bahwa *generalized inverse* dari matriks *A* adalah tidak tunggal. Untuk ordo matriks *3 x 3* akan mempunyai 9 *generalized inverse* dari matriks *A*.

Contoh 4.3 : Akan ditentukan *generalized inverse* dari matriks *B* dengan ordo *3 x 4* dengan menggunakan aturan algoritma, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

Akan dicari *rank* dari matriks *B* dengan menggunakan operasi baris elementer, yaitu :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} b_2 - 3b_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} b_3 - b_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

maka diperoleh *rk(A)* = 2.

Adapun langkah-langkah untuk menentukan *generalized inverse* dengan menggunakan aturan algoritma adalah sebagai berikut :

a. Diberikan matriks *B* dengan ordo *3x4* dengan *rk*(*B*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_1 = M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *B*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *B*,

$$B^t = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_1, *generalized inverse* dari *B*.

$$G_1 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks G_1 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *B*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_1 adalah *generalized inverse* dari *B* apabila berlaku $BG_1B = B$,

$$BG_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BG_1B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $BG_1B = B$, G_1 adalah *generalized inverse* dari matriks *B*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *B* dengan ordo *3x4* dengan *rk*(*B*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_2 = M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -12 & 5 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2/4 & -5/4 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *B*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d. Transposkan matriks *B*,

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2/4 & 0 \\ 3 & -5/4 & 0 \end{bmatrix}$$

e. Hasilnya berupa matriks G_2, *generalized inverse* dari *B* ,

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2/4 & 0 \\ 3 & -5/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_2 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *B*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_2 adalah *generalized inverse* dari *B* apabila berlaku BG_2B = *B*,

$$BG_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2/4 & 0 \\ 3 & -5/4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BG_2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti BG_2B = *B*, G_2 adalah *generalized inverse* dari matriks *B.*

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *B* dengan ordo *3x4* dengan *rk*(*B*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde *r*. Notasikan dengan *M*,

$$M_3 = M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *B*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *B*,

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_3, *generalized inverse* dari *B*,

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_3 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *B*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_3 adalah *generalized inverse* dari *B* apabila berlaku BG_3B = *B*,

$$BG_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BG_3B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti BG_3B = *B*, G_3 adalah *generalized inverse* dari matriks *B.*

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *B* dengan ordo *3x4* dengan *rk*(*B*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_4 = M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 2/4 & -3/4 \\ 2/4 & -5/4 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *B*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/4 & -5/4 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *B*,

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/4 & 0 & 2/4 \\ -3/4 & 0 & -5/4 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_4, *generalized inverse* dari *B*,

$$G_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/4 & 0 & 2/4 \\ -3/4 & 0 & -5/4 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_4 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *B*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_4 adalah *generalized inverse* dari *B* apabila berlaku BG_4B = *B*,

$$BG_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/4 & 0 & 2/4 \\ -3/4 & 0 & -5/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BG_4B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti BG_4B = *B*, G_4 adalah *generalized inverse* dari matriks *B*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *B* dengan ordo *3x4* dengan *rk*(*B*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_5 = M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *B*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *B*,

$$B^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_5, *generalized inverse* dari *B*,

$$G_5 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_5 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *B*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_5 adalah *generalized inverse* dari *B* apabila berlaku $BG_5B = B$,

$$BG_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BG_5B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $BG_5B = B$, G_5 adalah *generalized inverse* dari matriks *B.*

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *B* dengan ordo *3x4* dengan *rk*(*B*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_6 = M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *B*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *B*,

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_6, *generalized inverse* dari *B*,

$$G_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_6 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *B*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_6 adalah *generalized inverse* dari *B* apabila berlaku BG_6B = *B*,

$$BG_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BG_6B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti BG_6B = *B*, G_6 adalah *generalized inverse* dari matriks *B.*

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *B* dengan ordo *3x4* dengan *rk*(*B*) =2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_7 = M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} -12/_{11} & 7/_{11} \\ 5/_{11} & -2/_{11} \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *B*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -12/_{11} & 7/_{11} & 0 \\ 0 & 5/_{11} & -2/_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *B*,

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -12/_{11} & 5/_{11} & 0 \\ 7/_{11} & -2/_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_7, *generalized inverse* dari *B*.

$$G_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -12/_{11} & 5/_{11} & 0 \\ 7/_{11} & -2/_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_7 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *B*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_7 adalah *generalized inverse* dari *B* apabila berlaku $BG_7B = B$,

$$BG_7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -12/_{11} & 5/_{11} & 0 \\ 7/_{11} & -2/_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BG_7B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $BG_7B = B$, G_7 adalah *generalized inverse* dari matriks *B*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *B* dengan ordo *3x4* dengan *rk*(*B*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_8 = M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 3/11 & 1/11 \\ 5/11 & -2/11 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *B*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3/11 & 1/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/11 & -2/11 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *B*,

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3/11 & 0 & 5/11 \\ 1/11 & 0 & -2/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_8, *generalized inverse* dari *B*,

$$G_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3/11 & 0 & 5/11 \\ 1/11 & 0 & -2/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_8 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *B*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_8 adalah *generalized inverse* dari *B* apabila berlaku BG_8B = *B*,

$$BG_8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3/11 & 0 & 5/11 \\ 1/11 & 0 & -2/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BG_8B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti BG_8B = *B*, G_8 adalah *generalized inverse* dari matriks *B.*

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks B dengan ordo *3x4* dengan $rk(B)$ =2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan M,

$$M_9 = M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks M, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 2 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} -4/6 & 7/6 \\ 2/6 & -2/6 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks B, ganti setiap elemen matriks M dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -4/6 & 0 & 7/6 \\ 0 & 2/6 & 0 & -2/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks B,

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4/6 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7/6 & -2/6 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_9, *generalized inverse* dari B,

$$G_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4/6 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7/6 & -2/6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_9 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks B. Selanjutnya akan ditunjukkan G_9 adalah *generalized inverse* dari B apabila berlaku $BG_9B = B$,

$$BG_9 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4/6 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7/6 & -2/6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BG_9B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $BG_9B = B$, G_9 adalah *generalized inverse* dari matriks *B.*

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *B* dengan ordo *3x4* dengan *rk*(*B*) =2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_{10} = M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 2/6 & 1/6 \\ 2/6 & -2/6 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *B*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/6 & 0 & -2/6 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *B*,

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2/6 & 0 & 2/6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & -2/6 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_{10}, *generalized inverse* dari *B*,

$$G_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2/6 & 0 & 2/6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & -2/6 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{10} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *B*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{10} adalah *generalized inverse* dari *B* apabila berlaku $BG_{10}B = B$,

$$BG_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2/6 & 0 & 2/6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & -2/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BG_{10}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $BG_{10}B = B$, G_{10} adalah *generalized inverse* dari matriks *B*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *B* dengan ordo *3x4* dengan *rk*(*B*) =2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_{11} = M = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 2/18 & 1/18 \\ 4/18 & -7/18 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *B*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/18 & 0 & 1/18 \\ 0 & 4/18 & 0 & -7/18 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *B*,

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/18 & 4/18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/18 & -7/18 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_{11}, *generalized inverse* dari *B*,

$$G_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/18 & 4/18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/18 & -7/18 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{11} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *B*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{11} adalah *generalized inverse* dari *B* apabila berlaku $BG_{11}B$ = *B*,

$$BG_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{2}/_{18} & {}^{4}/_{18} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{18} & {}^{-7}/_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & {}^{6}/_{18} & {}^{-6}/_{18} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BG_{11}B = \begin{bmatrix} 0 & {}^{6}/_{18} & {}^{-6}/_{18} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $BG_{11}B$ = *B*, G_{11} adalah *generalized inverse* dari matriks *B.*

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *B* dengan ordo 3*x4* dengan *rk*(*B*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_{12} = M = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} {}^{2}/_{12} & {}^{-3}/_{12} \\ {}^{4}/_{12} & -1 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *B*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{2}/_{12} & {}^{-3}/_{12} \\ 0 & 0 & {}^{4}/_{12} & -1 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *B*,

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{2}/_{12} & {}^{4}/_{12} \\ 0 & {}^{-3}/_{12} & -1 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_{12}, *generalized inverse* dari *B*.

$$G_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{2}/_{12} & {}^{4}/_{12} \\ 0 & {}^{-3}/_{12} & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{12} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *B*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{12} adalah *generalized inverse* dari *B* apabila berlaku $BG_{12}B = B$,

$$BG_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{2}/_{12} & {}^{4}/_{12} \\ 0 & {}^{-3}/_{12} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & {}^{4}/_{12} & {}^{-4}/_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BG_{12}B = \begin{bmatrix} 0 & {}^{4}/_{12} & {}^{-4}/_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $BG_{12}B = B$, G_{12} adalah *generalized inverse* dari matriks *B.*

Dengan ditunjukkan $BG_{12}B = B$, G_{12} adalah *generalized inverse* dari matriks *B*. Dari hasil diatas dapat dilihat bahwa *generalized inverse* dari matriks *B* adalah tidak tunggal. Untuk ordo matriks *3 x 4* akan mempunyai 12 *generalized inverse* dari matriks *B*.

Contoh 4.4 : Akan ditentukan *generalized inverse* dari matriks *C* dengan ordo *4 x 4* dengan menggunakan aturan algoritma.

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

Akan dicari *rank* dari matriks *C* dengan menggunakan operasi baris elementer sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} b_2 - b_1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} b_4 - b_2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_1 - b_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -11 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_3 - 7b_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -11 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_1 - b_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -18 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_2 + 3b_1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -18 \\ 0 & -1 & -2 & -47 \\ 0 & -1 & -2 & -47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_3 - b_1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -18 \\ 0 & -1 & -2 & -47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maka akan diperoleh *rank* dari matriks *C* adalah 2.

Adapun langkah-langkah untuk menentukan *generalized inverse* dengan menggunakan aturan algoritma adalah sebagai berikut :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (C) = *2*, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan M,

$$M_1 = M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks M, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks A, ganti setiap elemen matriks M dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks C,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_1, *generalized inverse* dari C,

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_1 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks C. Selanjutnya akan ditunjukkan G_1 adalah *generalized inverse* dari C apabila berlaku $CG_1C = C$,

$$CG_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CG_1C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Karena terbukti CG_1C = *C*, G_1 adalah *generalized inverse* dari matriks *C* dan G_1 ini adalah tidak tunggal.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_2 = M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

a. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

b. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan matriks *C*,

$$C^t = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa matriks G_2 *generalized inverse* dari *C*,

$$G_2 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_2 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_2 adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku CG_2C = *C*,

$$CG_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CG_2C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti CG_2C = *C*, G_2 adalah *generalized inverse* dari matriks *C* dan G_2 ini adalah tidak tunggal.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = *2,* temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_3 = M = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 3/11 & -2/11 \\ 4/11 & 1/11 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 4/11 & 1/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *C*,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/11 & 4/11 & 0 & 0 \\ -2/11 & 1/11 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_3, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/11 & 4/11 & 0 & 0 \\ -2/11 & 1/11 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_3 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_3 adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku $CG_3C = C$,

$$CG_3 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/11 & 4/11 & 0 & 0 \\ -2/11 & 1/11 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CG_3C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_3C = C$, G_3 adalah *generalized inverse* dari matriks *C* .

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_4 = M = \begin{bmatrix} 21 & 13 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -13 \\ -3 & 21 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ -13/3 & 7 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1 & 0 & 0 \\ -13/3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *C*,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & -13/3 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_4, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & -13/3 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_4 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_4 adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku CG_4C = *C*,

$$CG_4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & -13/3 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CG_4C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti CG_4C = *C*, G_4 adalah *generalized inverse* dari matriks.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde *r*. Notasikan dengan *M*,

$$M_5 = M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 7/33 & -1/33 \\ -2/33 & 5/33 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/33 & -1/33 \\ 0 & 0 & -2/33 & 5/33 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *C*,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/33 & -2/33 \\ 0 & 0 & -1/33 & 5/33 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_5, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/33 & -2/33 \\ 0 & 0 & -1/33 & 5/33 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_5 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_5 adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku $CG_5C = C$,

$$CG_5 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/33 & -2/33 \\ 0 & 0 & -1/33 & 5/33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11/33 & -22/33 \\ 0 & 0 & 11/33 & 11/33 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CG_5C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11/33 & -22/33 \\ 0 & 0 & 11/33 & 11/33 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_5C = C$, G_5 adalah *generalized inverse* dari matriks *C*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) =2 , temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_6 = M = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 13 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 \\ -2/3 & 13/3 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & -5/3 & 13/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *C*,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_6, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_6 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_6 adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku $CG_6C = C$.

$$CG_6 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CG_6C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_6C = C$, G_6 adalah *generalized inverse* dari matriks *C*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *C* dengan ordo *4x4 rk* (*C*) =2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$M_7 = M = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

b. Temukan invers matriks M, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{47}\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 7/47 & -3/47 \\ 4/47 & 5/47 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks A, ganti setiap elemen matriks M dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 16/47 & 0 & 0 & -3/47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/47 & 0 & 0 & 5/47 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks C,

$$C^t = \begin{bmatrix} 7/47 & 0 & 0 & 4/47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/47 & 0 & 0 & 5/47 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_7, *generalized inverse* dari C.

$$G_7 = \begin{bmatrix} 7/47 & 0 & 0 & 4/47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/47 & 0 & 0 & 5/47 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_7 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks C. Selanjutnya akan ditunjukkan G_7 adalah *generalized inverse* dari C apabila berlaku $CG_7C = C$,

$$CG_7 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7/47 & 0 & 0 & 4/47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/47 & 0 & 0 & 5/47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CG_7C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_7C = C$, G_7 adalah *generalized inverse* dari matriks C.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4* *rk* (C) =2 , temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan M,

$$M_8 = M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks M, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks A, ganti setiap elemen matriks M dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks C,

$$C^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_8, *generalized inverse* dari C.

$$G_8 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_8 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks C. Selanjutnya akan ditunjukkan G_8 adalah *generalized inverse* dari C apabila berlaku $CG_8C = C$,

$$CG_8 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CG_8C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_8C = C$, G_8 adalah *generalized inverse* dari matriks *C*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_9 = M = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 7/11 & -1/11 \\ 4/11 & 1/11 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7/11 & -1/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/11 & 1/11 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks C,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7/11 & 0 & 0 & 4/11 \\ -1/11 & 0 & 0 & 1/11 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_9, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7/11 & 0 & 0 & 4/11 \\ -1/11 & 0 & 0 & 1/11 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_9 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_9 adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku $CG_9C = C$,

$$CG_9 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7/11 & 0 & 0 & 4/11 \\ -1/11 & 0 & 0 & 1/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CG_9C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_9C = C$, G_9 adalah *generalized inverse* dari matriks *C*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_{10} = M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} -2/11 & 5/11 \\ 3/11 & -2/11 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/11 & 5/11 \\ 0 & 0 & -3/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *C*,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/11 & 3/11 & 0 \\ 0 & 5/11 & -2/11 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_{10}, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/11 & 3/11 & 0 \\ 0 & 5/11 & -2/11 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{10} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{10} adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku $CG_{10}C = C$,

$$CG_{10} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/11 & 3/11 & 0 \\ 0 & 5/11 & -2/11 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CG_{10}C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_{10}C = C$, G_{10} adalah *generalized inverse* dari matriks *C*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_{11} = M = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 21 & 13 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -21 & 8 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} -13 & 21 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & 21 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *C*,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & -13 & 5 & 0 \\ 0 & 21 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_{11}, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -13 & 5 & 0 \\ 0 & 21 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{11} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{11} adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku $CG_{11}C = C$,

$$CG_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -13 & 5 & 0 \\ 0 & 21 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CG_{11}C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_{11}C = C$, G_{11} adalah *generalized inverse* dari matriks *C*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_{12} = M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *C*,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_{12}, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{12} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{12} adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku $CG_{12}C = C$,

$$CG_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CG_{12}C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_{12}C = C$, G_{12} adalah *generalized inverse* dari matriks *C*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_{13} = M = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *C*,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_{13}, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{13} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{13} adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku $CG_{13}C = C$,

$$CG_{13} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CG_{13}C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_{13}C = C$, G_{13} adalah *generalized inverse* dari matriks *C*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_{14} = M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *C*,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_{14}, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{14} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{14} adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku $CG_{14}C = C$,

$$CG_{14} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CG_{14}C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_{14}C = C$, G_{14} adalah *generalized inverse* dari matriks *C*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks C dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_{15} = M = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 8 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *C*,

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_{15}, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{15} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{15} adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku $CG_{15}C = C$,

$$CG_{15} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CG_{15}C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_{15}C = C$, G_{15} adalah *generalized inverse* dari matriks *C*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *C* dengan ordo *4x4 rk* (*C*) = 2, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan *M*,

$$M_{16} = M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 7/11 & -1/11 \\ -3/11 & 2/11 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *A*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7/11 & -1/11\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3/11 & 2/11\end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *C*,

$$C^t=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 7/11 & 0 & -3/11\\ 0 & -1/11 & 0 & 2/11\end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_{16}, *generalized inverse* dari *C*.

$$G_{16}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 7/11 & 0 & -3/11\\ 0 & -1/11 & 0 & 2/11\end{bmatrix}.$$

Matriks G_{16} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *C*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{16} adalah *generalized inverse* dari *C* apabila berlaku $CG_{16}C = C$,

$$CG_{16}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 1 & -4\\ 8 & 5 & 2 & 3\\ 21 & 13 & 5 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 7/11 & 0 & -3/11\\ 0 & -1/11 & 0 & 2/11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$CG_{16}C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3 & 1 & -4\\ 8 & 5 & 2 & 3\\ 21 & 13 & 5 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 1 & -4\\ 8 & 5 & 2 & 3\\ 21 & 13 & 5 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 7\end{bmatrix}.$$

Karena terbukti $CG_{16}C = C$, G_{16} adalah *generalized inverse* dari matriks C.

Contoh 4.5 : *Generalized Inverse* Pada Matriks dengan rank 3

Akan dicari *generalized inverse* untuk matriks *D* dengan ordo *3 x 4* yaitu :

$$D=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 5 & 4\end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan *rank* dari matriks *D* dilakukan operasi baris elementer sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 3\\1 & 4 & 1 & 3\\1 & 3 & 5 & 4\end{bmatrix} b_3 - b_1$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 3\\1 & 4 & 1 & 3\\0 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix} b_2 - b_1$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 3\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

Jadi *rk* (*D*) = 3

Adapun langkah-langkah untuk menentukan *generalized inverse* dengan menggunakan aturan algoritma adalah sebagai berikut :

a. Diberikan matriks *D* dengan ordo *3x4* dengan *rk*(*D*) = 3, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 3. Notasikan dengan *M*,

$$M_1 = M = \begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 4 & 3\\1 & 3 & 4\end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M_1} adj\ M_1 = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix}7 & -1 & -1\\-3 & 1 & 0\\-3 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *D*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$D = \begin{bmatrix}7 & -1 & 0 & -1\\-3 & 1 & 0 & 0\\-3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *D*,

$$D^t = \begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_1, *generalized inverse* dari *D*.

$$G_1 = \begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Matriks G_1 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *D*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_1 adalah *generalized inverse* dari *D* apabila berlaku DG_1D = *D*,

$$DG_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BG_1B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $DG_1D = D$, G_1 adalah *generalized inverse* dari matriks *D*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks *D* dengan ordo *3x4* dengan *rk* (*D*) = 3, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 3. Notasikan dengan *M*,

$$M_2 = M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

b. Temukan invers matriks *M*, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan $(M^{-1})^t$,

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 17 & -9 & -5 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 17/3 & -4/3 & -1/3 \\ -9/3 & 1 & 0 \\ -5/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

c. Dalam matriks *D*, ganti setiap elemen matriks *M* dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$D = \begin{bmatrix} 17/3 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ -9/3 & 1 & 0 & 0 \\ -5/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Transposkan matriks *D*,

$$D^t = \begin{bmatrix} 17/3 & -9/3 & -5/3 \\ -4/3 & 3/3 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e. Hasilnya berupa matriks G_2, *generalized inverse* dari *D*.

$$G_2 = \begin{bmatrix} 17/3 & -9/3 & -5/3 \\ -4/3 & 3/3 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_2 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *D*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_2 adalah *generalized inverse* dari *D* apabila berlaku $DG_2D = D$,

$$DG_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17/3 & -9/3 & -5/3 \\ -4/3 & 3/3 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DG_2D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Jadi, terbukti $DG_2D = D$, G_2 adalah *generalized inverse* dari matriks *D*. Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditemukan *generalized inverse* yang lainnya pada matriks *D*.

4.2 *Generalized Inverse* Pada Matriks dengan *Rank* 1

Generalized Inverse untuk matriks dengan rank 1 mempunyai algoritma yang sama dengan algoritma-algoritma sebelumnya. Untuk mencari invers pada matriks dengan *rank* 1 sebagai berikut :

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

dan dari matriks A dengan $rk\ (A) = 1$ maka :

1. $$\begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} 0 & (a_{12})^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{(mn)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (a_{mn})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Contoh 4.6 : Akan ditentukan *generalized inverse* dari matriks E ordo $4x3$ yaitu :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

Untuk mencari *rank* dari matriks E dengan menggunakan operasi baris elemeter sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} b_4 - 2b_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_3 - 3b_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_2 - 2b_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maka diperoleh *rk* (*E*) = 1

Dengan langkah-langkah aturan algoritma yang sama untuk menentukan *generalized inverse* sebagai berikut :

a. $M_1 = 1 = {}^{1}/_{1} = 1.$

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_1)^t$,

$$(M_1)^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_1 yang merupakan *generalized inverse* dari matriks *E*,

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_1 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_1 adalah *generalized inverse* dari *E* apabila berlaku $EG_1E = E$,

$$EG_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EG_1E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti $EG_1E = E$, G_1 adalah *generalized inverse* dari matriks E.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. $M_2 = 2 = 1/_2$.

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_2)^t$,

$$(M_2)^t = \begin{bmatrix} 0 & 1/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_2 yang merupakan *generalized inverse* dari matriks *E*,

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_2 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_2 adalah *generalized inverse* dari *E* apabila berlaku $EG_2E = E$,

$$EG_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EG_2E = \begin{bmatrix} 0 & 1/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti $EG_2E = E$, G_2 adalah *generalized inverse* dari matriks *E*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. $M_3 = 3 = 1/_3$.

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_3)^t$,

$$(M_3)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_3 yang merupakan generalized inverse dari matriks *E*,

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_3 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_3 adalah *generalized inverse* dari *E* apabila berlaku $EG_3E = E$,

$$EG_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EG_3E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti $EG_3E = E$, G_3 adalah *generalized inverse* dari matriks *E*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. $M_4 = 4 = 1/4$.

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_4)^t$,

$$(M_4)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_4 yang merupakan generalized inverse dari matriks *E*,

$$G_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_4 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_4 adalah *generalized inverse* dari *E* apabila berlaku EG_4E = *E*,

$$EG_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$EG_4E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti EG_4E = *E*, G_4 adalah *generalized inverse* dari matriks *E*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. M_5 = 3 = $1/3$.

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_5)^t$,

$$(M_5)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_5 yang merupakan generalized inverse dari matriks *E*,

$$G_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_5 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_5 adalah *generalized inverse* dari *E* apabila berlaku $EG_5E = E$,

$$EG_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EG_5E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti $EG_5E = E$, G_5 adalah *generalized inverse* dari matriks *E*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. $M_6 = 6 = {}^1/_6$.

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1/_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_6)^t$,

$$(M_6)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1/_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_6 yang merupakan generalized inverse dari matriks *E*,

$$G_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1/_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_6 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_6 adalah *generalized inverse* dari *E* apabila berlaku $EG_6E = E$,

$$EG_6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9/6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EG_6E = \begin{bmatrix} 0 & 3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9/6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti $EG_6E = E$, G_6 adalah *generalized inverse* dari matriks *E*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. $M_7 = 9 = 1/9$.

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_7)^t$,

$$(M_7)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_7 yang merupakan *generalized inverse* dari matriks *E*,

$$G_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_7 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_7 adalah *generalized inverse* dari *E* apabila berlaku $EG_7E = E$,

$$EG_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3/9 & 0 \\ 0 & 0 & 6/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12/9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EG_7E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3/9 & 0 \\ 0 & 0 & 6/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12/9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti EG_7E = *E*, G_7 adalah *generalized inverse* dari matriks *E*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. M_8 = 12 = $1/_{12}$.

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_8)^t$,

$$(M_8)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_8 yang merupakan *generalized inverse* dari matriks *E*,

$$G_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_8 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_8 adalah *generalized inverse* dari *E* apabila berlaku EG_8E = *E*,

$$EG_8 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3/_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 6/_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 9/_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$EG_8E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3/_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 6/_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 9/_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti EG_8E = *E*, G_8 adalah *generalized inverse* dari matriks *E*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. $M_9 = 5 = {}^{1}/_{5}$.

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^{1}/_{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_9)^t$,

$$(M_9)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_9 yang merupakan generalized inverse dari matriks *E*,

$$G_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_9 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_9 adalah *generalized inverse* dari *E* apabila berlaku $EG_9E = E$,

$$EG_9 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EG_9E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti $EG_9E = E$, G_9 adalah *generalized inverse* dari matriks *E*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. $M_{10} = 10 = {}^{1}/_{10}$.

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_{10})^t$,

$$(M_{10})^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_{10} yang merupakan *generalized inverse* dari matriks *E*,

$$G_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{10} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{10} adalah *generalized inverse* dari *E* apabila berlaku $EG_{10}E = E$,

$$EG_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EG_{10}E = \begin{bmatrix} 0 & 5/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti $EG_{10}E = E$, G_{10} adalah *generalized inverse* dari matriks *E*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. M_{11} = 15 = $1/15$.

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_{11})^t$,

$$(M_{11})^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/15 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_{11} yang merupakan generalized inverse dari matriks *E*,

$$G_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{11} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan $G_1 1$ adalah *generalized inverse* dari E apabila berlaku $EG_{11}E = E$,

$$EG_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/15 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5/15 & 0 \\ 0 & 0 & 10/15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20/15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EG_{11}E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5/15 & 0 \\ 0 & 0 & 10/15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20/15 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti $EG_{11}E = E$, G_{11} adalah *generalized inverse* dari matriks *E*.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. $M_{12} = 20 = 1/20$.

b. Ganti semua elemen-elemen matriks *E* dengan nol,

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}.$$

c. Transposkan menjadi $(M_{12})^t$,

$$(M_{12})^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}.$$

d. Hasilnya berupa G_{12} yang merupakan *generalized inverse* dari matriks *E*,

$$G_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}.$$

Matriks G_{12} ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks *E*. Selanjutnya akan ditunjukkan G_{12} adalah *generalized inverse* dari *E* apabila berlaku $EG_{12}E = E$,

$$EG_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5/20 \\ 0 & 0 & 0 & 10/20 \\ 0 & 0 & 0 & 15/20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$EG_{12}E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5/20 \\ 0 & 0 & 0 & 10/20 \\ 0 & 0 & 0 & 15/20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti $EG_{12}E = E$, G_{12} adalah *generalized inverse* dari matriks *E*. Dari hasil di atas dapat dilihat bahwa *generalized inverse* dari matriks *E* adalah tidak tunggal. Untuk ordo matriks *4x3* mempunyai 12 *generalized inverse* dari matriks *E*.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dan pembahasan pada bab-bab sebelumnya dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. *Generalized inverse* dari sebuah matriks A adalah sebarang matriks G yang memenuhi persamaan $AGA = A$.
2. Menentukan *generalized inverse* dari suatu matriks A dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu :
   a. Aturan Pendiagonalan Matriks dengan langkah-langkah sebagai berikut :
      (i) Diketahui matriks sembarang A yang berukuran $n \times n$.
      (ii) Akan dicari matriks P dan matriks Q. Matriks P dicari dengan menggunakan operasi elementer baris, sedangkan matriks Q dicari dengan menggunakan operasi elementer kolom.
      (iii) Setelah didapatkan matriks P dan matriks Q,akan ditentukan matriks Δ yaitu $\Delta = PAQ$.
      (iv) Kemudian akan dicari invers dari matriks Δ.
      (v) Selanjutnya akan ditentukan matriks G yaitu $G = Q\Delta^{-}P$. G adalah *generalized inverse* dari matriks A.

   b. Aturan Algoritma dengan langkah-langkah sebagai berikut :
      (i) Dalam matriks A dengan *rank* r, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde r. Notasikan dengan M.
      (ii) Temukan invers matriks M, yaitu M^{-1} kemudian tranposkan,$(M^{-1})^{t}$.
      (iii) Dalam matriks A, ganti setiap elemen matriks M dengan elemen matriks $(M^{-1})^{t}$ dan ganti elemen lainnya dengan nol.
      (iv) Transposkan matriks A.
      (v) Hasilnya berupa matriks G yang merupakan *generalized inverse* dari A.
3. *Generalized inverse* dari sebuah matriks bersifat tidak tunggal. Ketidaktunggalannya dapat dilihat dari beberapa contoh pada Bab IV. Untuk

aturan pendiagonalan matriks banyak matriks G dapat dilihat dari banyaknya baris atau kolom. Sedangkan untuk *generalized inverse* pada aturan algoritma dapat ditentukan jumlah *generalized inverse* sebanyak perkalian ordo matriks.

5.2 Saran

Dalam pembahasan yang telah dikemukakan, penulis hanya membahas masalah pada penelitian ini yaitu mengemukakan langkah-langkah atau aturan dalam menentukan *generalized inverse* dari suatu matriks. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik aljabar dapat melanjutkan pembahasan tentang moore penrose invers dan jenis-jenis invers lain serta penerapannya dalam penyelesaian sistem persamaan linear.

DAFTAR PUSTAKA

Adetunde,I.A, dkk. *On The Generalisized Inverse of a Matrix.* American journal of Scientific Research.2010.

Anton, Howard. *Aljabar Linier Elementer*, edisi kelima. Jakarta: Erlangga, 1987.

Anton, Howard. *Aljabar Linier Elementer*, edisi ketujuh. Jakarta.2000.

H S, Suryadi.*Pengantar Aljabar Linier*.*Jakarta: Gunadarma*, 1995.

Jacob,B. *Linier Algebra*. W.H.Freeman and Company, New York.1990.

R.Searley , Shayle. *Matrix Algebra Useful For Statistic*. United States of America.1982.

Setya Budi, Wono. *Aljabar Linear*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.1995.

Suryana. *Generalized Inverses Matrices*. Disarikan dari *Linear Models* oleh Searle. S. R, John Wiley & Sons 1971. Inc: New York 1-7.